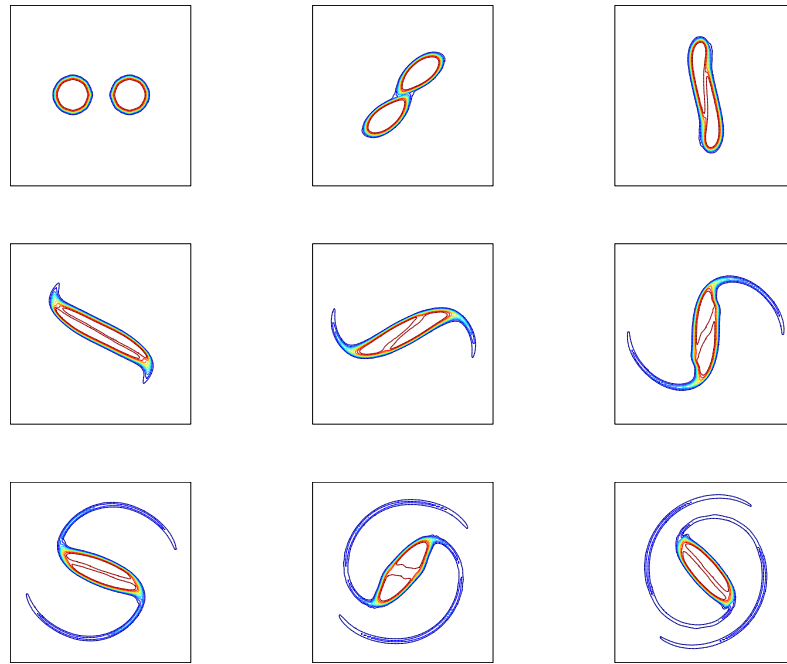


# Interaction de deux tourbillons dans un courant de grande échelle



Guillaume MAZE

Responsable : Xavier CARTON

Juin 2002

# Table des matières

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>                                 | <b>3</b>  |
| <b>2</b> | <b>Equations générales</b>                          | <b>4</b>  |
| <b>3</b> | <b>Dynamique des points vortex</b>                  | <b>6</b>  |
| 3.1      | Fonction de courant . . . . .                       | 6         |
| 3.2      | Champ de vitesse . . . . .                          | 7         |
| 3.3      | Hamiltonien . . . . .                               | 7         |
| 3.4      | Trajectoires approchées des points vortex . . . . . | 9         |
| <b>4</b> | <b>Etats stationnaires de tourbillons étendus</b>   | <b>10</b> |
| 4.1      | Solution analytique . . . . .                       | 10        |
| 4.1.1    | Fonction de courant . . . . .                       | 10        |
| 4.1.2    | L'état stationnaire . . . . .                       | 11        |
| 4.2      | Solution numérique . . . . .                        | 14        |
| 4.2.1    | Code états stationnaires . . . . .                  | 14        |
| 4.2.2    | Modèle elliptique . . . . .                         | 17        |
| <b>5</b> | <b>Évolution non linéaire</b>                       | <b>19</b> |
| 5.1      | Le code pseudo-spectral . . . . .                   | 19        |
| 5.2      | Fusion de deux tourbillons identiques . . . . .     | 19        |
| 5.2.1    | Distance critique de fusion . . . . .               | 20        |
| 5.2.2    | Efficacité . . . . .                                | 20        |
| 5.3      | Régimes dynamiques . . . . .                        | 22        |
| <b>6</b> | <b>Conclusion</b>                                   | <b>24</b> |
| <b>A</b> | <b>Formule de l'hamiltonien</b>                     | <b>25</b> |
| <b>B</b> | <b>Travail préliminaire</b>                         | <b>26</b> |

# Chapitre 1

## Introduction

Des observations océaniques ont montré que deux tourbillons de même signe pouvaient interagir (exemple de deux meddies dans le Golfe de Cadix); d'autre part les études de turbulence 2D incompressible ont mis en évidence l'importance du phénomène de fusion. Ce phénomène transfère l'énergie vers les grandes échelles et l'enstrophie vers les petites échelles. En effet deux vortex de même signe et suffisamment proches peuvent entrer en contact, mélanger leur fluide et ne devenir qu'une seule structure (voir images de couverture). Si ces vortex ont la même taille et la même vorticité uniforme alors il existe une distance critique en dessous de laquelle ils fusionnent inexorablement (environ 3 fois leur rayon). Ce processus a été largement étudié avec ou sans symétries des tourbillons mais rarement sous l'influence d'un paramètre extérieur (variation de l'épaisseur du fluide, instabilité barotrope).

On se propose d'étudier dans un contexte simplifié l'évolution de deux vortex sous l'influence d'un champ externe de déformation de faible amplitude. L'évolution d'un seul vortex dans un tel champ est bien connue, mais elle l'est beaucoup moins dans le cas de deux vortex. Les deux tourbillons sont supposés identiques, de vorticité uniforme et symétriques l'un de l'autre par rapport au centre du repère. Le champ de déformation sera également axisymétrique. Nous nous intéressons donc ici à décrire et classer les régimes dynamiques importants (stationnarité et fusion) du système.

Le problème est abordé de manière analytique et numérique. Après avoir fixé le cadre général de nos calculs (Chapitre 2), la dynamique du centre des tourbillons est déterminée par la théorie des points vortex (Chapitre 3). La forme des tourbillons pour l'état stationnaire est ensuite calculée (Chapitre 4.1) et éprouvée numériquement par une méthode itérative (Chapitre 4.2.1). Le mode elliptique de déformation étant prépondérant on utilise un modèle elliptique pour étudier la stationnarité et la distance critique de fusion (Chapitre 4.2.2). Enfin un code pseudo-spectral permet d'étudier la dynamique non-linéaire et de quantifier les différents régimes (Chapitre 5).

## Chapitre 2

# Equations générales

Pour étudier la dynamique tourbillonnaire, nous pouvons faire l'hypothèse que les forces d'entrainements (rotation terrestre par exemple) sont dominantes sur les forces d'inertie, ce qui a pour conséquence de bi-dimensionnaliser l'écoulement [1]. Prenons un fluide incompressible, la non-divergence horizontale du champ de vitesse permet d'exprimer celui-ci en terme de dérivés d'une fonction de courant  $\psi$  :

$$(u, v) = \left( -\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x} \right) \quad ; \quad (u_r, u_\alpha) = \left( \dot{r} = \frac{-1}{r} \frac{\partial\psi}{\partial\alpha}, r\dot{\alpha} = \frac{\partial\psi}{\partial r} \right)$$

Sous ces hypothèses le mouvement est décrit par les équations suivantes :

$$\frac{Dq}{Dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \vec{U} \cdot \vec{\nabla}_h q = \frac{\partial q}{\partial t} + J(\psi + \bar{\psi}, q) = \nu \nabla^2 q \quad (2.1)$$

$$\nabla^2 \psi = q \quad (2.2)$$

avec  $q$  la vorticité,  $\nu$  la viscosité cinématique du fluide,  $\psi$  la fonction de courant des deux tourbillons,  $\bar{\psi}$  la fonction de courant du champ externe de déformation de grande échelle et  $J$  le Jacobien, produit antisymétrique des dérivés :  $J(a, b) = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x} = \frac{1}{r} \left( \frac{\partial a}{\partial r} \frac{\partial b}{\partial \alpha} - \frac{\partial a}{\partial \alpha} \frac{\partial b}{\partial r} \right)$ .

Le champ de contrainte, nommé par la suite : strain, est de la forme (basée sur la formulation de D. Dritschel[2]) :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) + \frac{\gamma}{2}[2xy \cos(2\phi_s) - (x^2 - y^2) \sin(2\phi_s)] \\ \bar{\psi} &= \frac{\Omega}{2}r^2 + \frac{\gamma}{2}r^2 \sin(2(\alpha - \phi_s)) \end{aligned}$$

avec  $\Omega$  la rotation du strain par rapport au repère fixe,  $\gamma$  l'intensité de la contrainte (de faible amplitude :  $\gamma \leq 0.1q$ ),  $\phi_s$  l'angle fait par les axes de cette contrainte avec les axes principaux du repère fixe (voir figure 2.1) et  $(r, \alpha)$  les coordonnées polaires à partir du centre du plan.

Notons que le champ de vitesse du strain en coordonnées polaires est donc :

$$\bar{U}_r = -\gamma r \cos(2(\alpha - \phi_s)) ; \bar{U}_\alpha = r(\Omega + \gamma \sin(2(\alpha - \phi_s)))$$

La résolution de l'équation de Poisson (2.2) en terme de fonction de Green donne[3] :

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2\pi} \iint q(x', y') \ln(\rho) dx' dy' \quad (2.3)$$

avec  $\rho^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2$ .

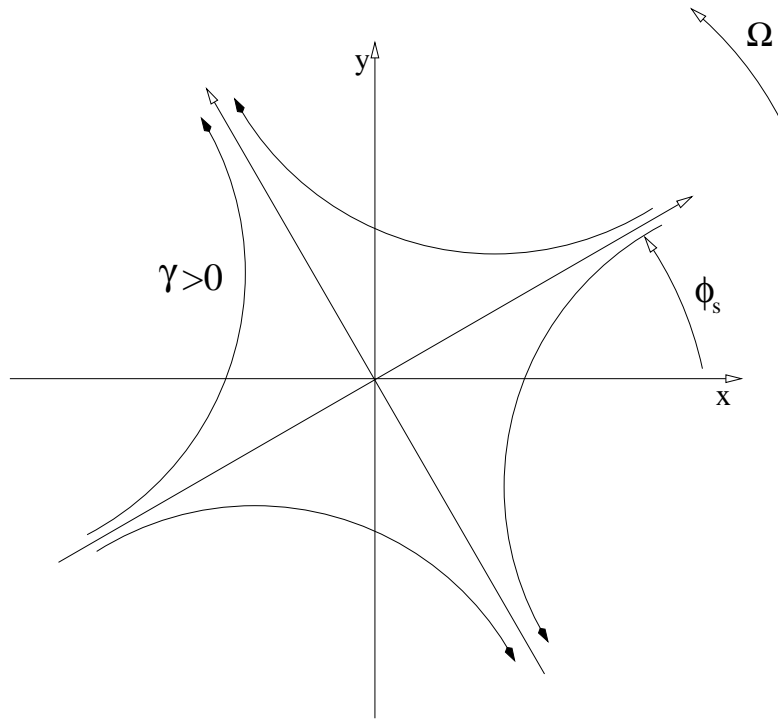


FIG. 2.1 – Champ de déformation externe imposé aux deux tourbillons

# Chapitre 3

## Dynamique des points vortex

L'étude analytique menée pour étudier l'interaction de deux tourbillons étendus dans un champ de déformation externe faible de grande échelle, s'appuie principalement sur l'hypothèse que le centre de chaque tourbillon suit en première approximation la trajectoire prédite par la dynamique des points vortex. Cette hypothèse est valable dans la mesure où la surface des deux tourbillons reste faible et qu'ils sont assez éloignés l'un de l'autre.

### 3.1 Fonction de courant

Un point vortex est un tourbillon qui concentre sa circulation  $\Gamma$  sur une ponctualité du plan. Localisons ce point en  $(X, Y) \equiv (R, \theta)$  :

$$\Gamma = \iint q dS = \text{constante} \quad ; \quad q = \Gamma \delta(R, \theta)$$

où  $\delta$  est la fonction Dirac.

La fonction de courant induite par un tel point vortex se déduit<sup>1</sup> de l'équation (2.3) :

$$\psi_{tb} = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln((X-x)^2 + (Y-y)^2) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha))$$

D'autre part, à la lumière du travail préliminaire effectué (voir appendice B) et dans la perspective de simplifier au plus le problème, nous prendrons un strain incliné à  $\phi_s = \pi/4$ , donc de la forme :

$$\bar{\psi} = \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\gamma}{2}(x^2 - y^2) = \frac{\Omega}{2}r^2 - \frac{\gamma}{2}r^2 \cos(2\alpha) \quad (3.1)$$

Notons qu'un champ de cisaillement (linéaire) pure est obtenu en prenant :  $\Omega = \pm\gamma$ .

Le système est le suivant : deux tourbillons situés en  $(R, \theta)$  et  $(R, \theta + \pi)$  et le strain. La fonction de courant totale est la somme de chacune des trois composantes :

$$\begin{aligned} \psi_{tot} &= \psi_{tb1} + \psi_{tb2} + \bar{\psi} \\ \psi_{tot} &= \frac{\Gamma}{4\pi} [\ln(R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)) + \\ &\quad \ln(R^2 + r^2 + 2rR \cos(\theta - \alpha))] + \frac{\Omega}{2}r^2 - \frac{\gamma}{2}r^2 \cos(2\alpha) \\ \psi_{tot} &= \frac{\Gamma}{4\pi} [\ln(R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)) + \\ &\quad \ln(R^2 + r^2 + 2rR \cos(\theta - \alpha)) + 2\frac{\pi\Omega}{\Gamma}r^2 - 2\beta r^2 \cos(2\alpha)] \end{aligned} \quad (3.2)$$

avec  $\beta = \frac{\gamma\pi}{\Gamma}$  la mesure relative du strain par rapport à la circulation de chaque point vortex.  $\beta$  est supposé petit.

---

<sup>1</sup>De la manière suivante :

$$\psi = \frac{1}{2\pi} \iint q(x', y') \ln(\rho) dS = \frac{1}{2\pi} \iint \Gamma \delta(R, \theta) \ln(\rho) dS = \frac{\Gamma}{2\pi} \iint \ln(\rho(R, \theta)) dS = \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(\rho(R, \theta)) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(\rho^2(R, \theta))$$

## 3.2 Champ de vitesse

Calculons d'abord le champ de vitesse en tout point  $(r, \alpha)$  à partir de l'équation (3.2) :

$$\vec{U}(r, \alpha) \Leftrightarrow \begin{cases} u_r = \dot{r} = \frac{-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \\ u_\alpha = r\dot{\alpha} = \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{cases}$$

$$u_r = -\frac{\Gamma}{2\pi} \left( -\frac{R \sin(\theta - \alpha)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)} + \frac{R \sin(\theta - \alpha)}{R^2 + r^2 + 2rR \cos(\theta - \alpha)} + 2\beta r \sin(2\alpha) \right) \quad (3.3)$$

$$u_\alpha = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{r - R \cos(\theta - \alpha)}{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \alpha)} + \frac{r + R \cos(\theta - \alpha)}{R^2 + r^2 + 2rR \cos(\theta - \alpha)} + \frac{2\pi\Omega}{\Gamma} r - 2\beta r \cos(2\alpha) \right) \quad (3.4)$$

Nous voulons déterminer les conditions pour lesquelles le point vortex 1 est fixe dans le repère, plaçons nous donc en  $(R, \theta)$  et annulons le champ de vitesse. La fonction de courant d'un point vortex n'étant pas définie en son centre (c'est à dire qu'un tourbillon n'induit pas de mouvement sur lui-même), on supprime le premier terme du membre de droite dans les équations (3.3) et (3.4) :

$$u_R = -\frac{\beta\Gamma}{\pi} R \sin(2\theta) = 0 \quad (3.5)$$

$$u_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{1}{2R} + \frac{2\pi\Omega}{\Gamma} R - 2\beta R \cos(2\theta) \right) = 0 \quad (3.6)$$

**Ce qui mène aux conditions de stationnarité des points vortex :**

$$\begin{cases} \theta = p\pi \\ R = R_0 = \left( 2\sqrt{\beta - \frac{\pi\Omega}{\Gamma}} \right)^{-1} \end{cases} \quad (3.7)$$

avec  $p = 0$  pour le point vortex 1 et  $p = 1$  pour le point vortex 2. Notons que la condition :

$$\beta > \frac{\pi\Omega}{\Gamma} \equiv \gamma > \Omega$$

doit également être vérifiée.

**-Remarque :**

Si les deux tourbillons étaient placés initialement sur l'axe des abscisses (condition  $u_R = 0$  vérifiée) quelles seraient alors le taux de rotation  $\Omega$  nécessaire des axes du strain pour annuler toutes les composantes orthoradiales du mouvement ?

Le taux de rotation induit par le strain sur le point vortex 1 est :  $\frac{\overline{U_\theta}}{R} = \Omega - \gamma$ ; celui induit par l'autre point vortex est (avec  $d = R/2$ ) :  $\frac{\Gamma}{2\pi d} \frac{1}{d/2} = \frac{\Gamma}{\pi d^2}$ ; la rotation nécessaire pour annuler le tout vérifie donc :

$$\frac{\Gamma}{\pi d^2} + \Omega - \gamma = 0 \quad (3.8)$$

## 3.3 Hamiltonien

Une autre approche du problème consiste à déterminer les trajectoires du centre des tourbillons puis à trouver la trajectoire limite entre celles fermées et celles ouvertes. Cette limite est un *point selle*.

Le problème étant symétrique et les tourbillons identiques, les trajectoires de chacun des points vortex seront axisymétriques.

Ces considérations (étude des trajectoires, symétries) sous-entendent une approche hamiltonienne du système dynamique à partir des fonctions de courants des différentes composantes.

L'Hamiltonien a pour expression (voir l'appendice A pour plus de détails) :

$$\mathcal{H} = -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left( \ln(2R) + 2\frac{\pi\Omega}{\Gamma} R^2 - 2\beta R^2 \cos(2\theta) \right) \quad (3.9)$$

où  $R$  et  $\theta$  sont des variables indépendantes par rapport auxquelles nous pouvons dériver.

L'énergie étant conservative, les trajectoires possibles sont celles pour lesquelles l'Hamiltonien reste constant (voir aussi l'appendice A). La figure (3.1) représente les lignes d'iso-amplitude de l'Hamiltonien.

À partir de (3.9) nous pouvons exprimer les deux conditions cinématiques pour lesquelles l'Hamiltonien sera constant radialement et orthoradialement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial R} &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left( \frac{1}{R} + 4\frac{\pi\Omega}{\Gamma}R - 4\beta R \cos(2\theta) \right) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} 4\beta R^2 \sin(2\theta) = 0\end{aligned}$$

Ce système d'équations mène à la même condition de stationnarité des points vortex (3.7). Si les coordonnées  $(R, \theta)$  satisfont ce système alors elles représentent un point stationnaire dans l'espace  $(r, \alpha)$ . Les trajectoires au de-là de ce point sont ouvertes (prépondérance du strain qui emporte les deux points vortex) et les trajectoires en de-ça sont fermées (corotation ou même fusion des points vortex).

La valeur de l'hamiltonien pour ces points est :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_0 &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left[ \frac{\pi\Omega}{2} \frac{1}{\beta\Gamma - \pi\Omega} - \frac{1}{2} \ln \left( \beta - \frac{\pi\Omega}{\Gamma} \right) - \frac{2\beta}{\sqrt{\beta - \frac{\pi\Omega}{\Gamma}}} \right] \\ \mathcal{H}_0 &= -\frac{\Gamma^2}{8\pi} \left[ \frac{\Omega}{\gamma - \Omega} - \ln \left( \frac{\pi}{\Gamma} (\gamma - \Omega) \right) - 4\gamma \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma(\gamma - \Omega)}} \right]\end{aligned}$$

Il est également intéressant de regarder quelle est la stabilité de ces points stationnaires. Pour cela calculons les dérivées du deuxième ordre de l'Hamiltonien :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R^2} &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left( \frac{-1}{R^2} + 4\frac{\pi\Omega}{\Gamma} - 4\beta \cos(2\theta) \right) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta^2} &= -\frac{2\Gamma^2}{\pi} \beta R^2 \cos(2\theta)\end{aligned}$$

et plaçons-nous aux points stationnaires définies par les conditions (3.7), on obtient les valeurs :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial R^2} \cdot (R_0; \theta_0) &= 2\Gamma^2 \left( \beta - \frac{\pi\Omega}{\Gamma} \right) = 2\frac{\pi}{\Gamma} (\gamma - \Omega) \\ \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \theta^2} \cdot (R_0; \theta_0) &= \frac{-\Gamma^2 \beta}{4\pi \left( \beta - \frac{\pi\Omega}{\Gamma} \right)} = \frac{\Gamma^2}{4\pi} \frac{-\gamma}{\gamma - \Omega}\end{aligned}$$

Sous les hypothèses que  $\gamma > \Omega$  et  $\beta > 0$  il apparaît donc que la position stationnaire est stable aux perturbations radiales mais plutôt instable aux perturbations orthoradiales.

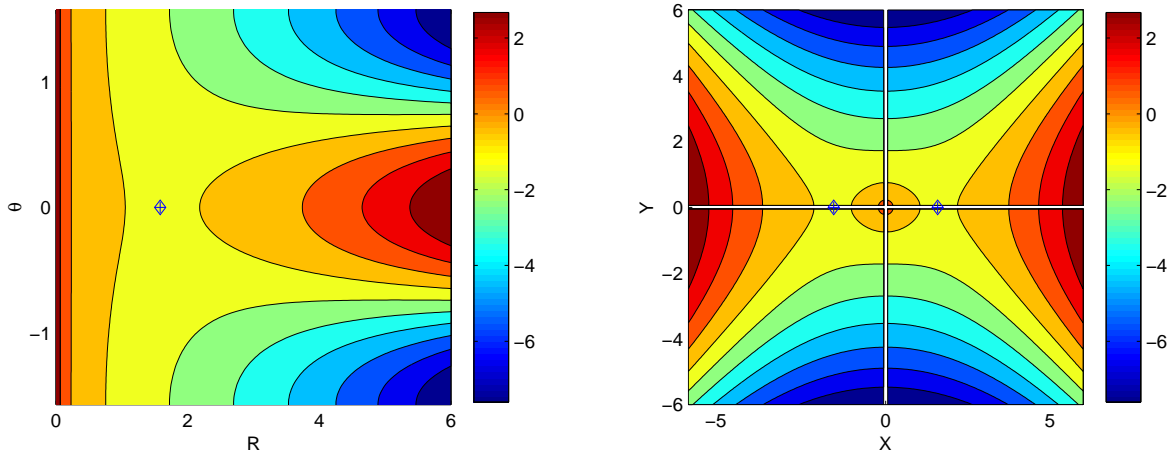


FIG. 3.1 – Hamiltonien de deux points vortex identiques dans un strain avec  $\beta = 0.1$ ,  $\gamma = 0.1$  et  $\Omega = 0$ . Les marques bleues indiquent les positions des points stationnaires. À gauche : coordonnées polaires, à droite : coordonnées cartésiennes.



### 3.4 Trajectoires approchées des points vortex

Notre objectif est la stationnarité, les points vortex situés suivant la condition (3.7) seront donc fixes dans le repère. Toutefois nous pouvons préciser la trajectoire des points vortex dans le cas non-stationnaire.

En l'absence de strain ( $\beta = 0; \Omega = 0$ ) et pour les deux point vortex initialement situés sur l'axe des abscisses, les équations (3.5) et (3.6) nous indiquent que la trajectoire des points vortex est un cercle de rayon  $R$  ( $U_R = 0$ ) et que le taux de rotation est :

$$\Omega_0 = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{1}{2R^2}$$

En présence d'un strain de faible amplitude ( $\beta \ll 1$  et toujours  $\Omega = 0$ ) on peut approcher la trajectoire des points vortex en faisant un développement de Taylor autour du cas sans strain de  $r$  et  $\alpha$  :

$$\begin{aligned} r &= R_0 + \beta f(t) + o(\beta^2) \\ \alpha &= \Omega_0 t + \beta g(t) + o(\beta^2) \end{aligned}$$

En substituant dans les équations (3.5) et (3.6) du champ de vitesse des points vortex, on obtient au premier ordre :

$$\begin{aligned} f(t) &= 2R_0^3 \cos(2\Omega_0 t) \\ g(t) &= -2R_0^2 \sin(2\Omega_0 t) \end{aligned}$$

ce qui représente une déformation elliptique (mode 2) de la trajectoire circulaire à l'ordre 0 des points vortex. Précisons les paramètres de cette trajectoire :

– le demi-grand axe  $a$  et demi-petit axe  $b$  valent :

$$a = R_0(1 + 2\beta R_0^2) \quad ; \quad b = R_0(1 - 2\beta R_0^2)$$

– le rapport d'aspect et l'ellipticité eux :

$$\lambda = \frac{b}{a} = \frac{1 - 2\beta R_0^2}{1 + 2\beta R_0^2} \quad ; \quad e = 4\beta R_0^4$$

La dépendance en  $-\sin(2\Omega_0 t)$  de  $\alpha$  indique que  $\dot{\alpha}$  sera en  $-\cos(2\Omega_0 t)$ . Donc les points vortex sont les plus rapides lorsqu'ils sont au plus proche l'un de l'autre ( $r = b$ ) et ils sont les plus lents quand ils sont les plus éloignés ( $r = a$ ). On retrouve ici un résultat intuitif. En effet prenons par exemple le point vortex 1 : de  $-\pi/4$  à  $\pi/4$  (voir figure 2.1 avec  $\phi_s = \pi/4$ ) la rotation anticyclonique est opposée à l'effet du strain, mais de  $\pi/4$  à  $3\pi/4$  cet effet s'ajoute. On devine où vont intervenir les accélérations, les ralentissements, les rapprochements et les éloignements des points vortex.

# Chapitre 4

## Etats stationnaires de tourbillons étendus

L'objectif de cette section est de déterminer analytiquement la forme, l'amplitude et les paramètres de la perturbation induite par l'autre tourbillon et le strain sur l'un des tourbillons dans le cas stationnaire. Ces résultats sont ensuite éprouvés par deux modèles numériques.

### 4.1 Solution analytique

#### 4.1.1 Fonction de courant

On considère que les tourbillons sont étendus avec une vorticité potentielle  $\zeta_0$  constante. On cherche quel est l'état stationnaire et la forme de la déformation induite par l'autre tourbillon et le strain. Prenons un tourbillon étendu de rayon unité, son profil de vorticité est  $\bar{\zeta} = \zeta_0 H[r = 1]$  avec  $H$  la fonction de Heavyside. Appliquons une perturbation indépendante du temps à ce tourbillon (voir figure 4.1), son nouveau profil de vorticité est (la sommation sur  $n$  est sous-entendue) :  $\zeta = \zeta_0 H[r = 1 + \eta_n \cos(n\alpha)]$ . Le profil vortical de la perturbation est donc la différence :

$$\zeta' = \zeta - \bar{\zeta} = \zeta_0 [H(1 + \eta_n \cos(n\alpha)) - H(r = 1)] = \zeta_0 \eta_n \cos(n\alpha) \delta(1)$$

avec  $\delta$  la fonction de Dirac. Or  $\zeta' = \Delta\psi'$ , donc pour obtenir la forme de la fonction de courant de la perturbation, il faut résoudre l'équation :

$$\Delta\psi' = \zeta_0 \eta_n \cos(n\alpha) \delta(1)$$

qui est une Équation d'Euler classique dont la solution est :

$$\psi' = \begin{cases} Ar^n \cos(n\alpha) & \text{pour } r < 1 \\ \frac{A}{r^n} \cos(n\alpha) & \text{pour } r > 1 \end{cases} \quad (4.1)$$

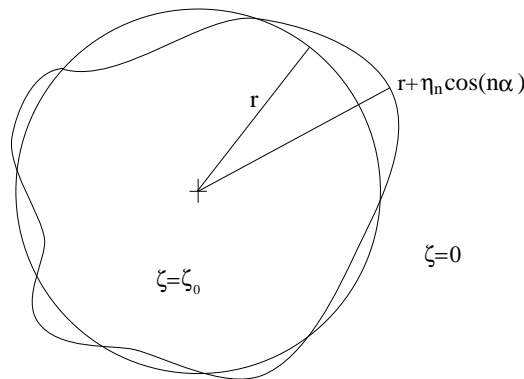


FIG. 4.1 – Tourbillon circulaire de rayon  $r$  subissant une déformation

On se place également dans les conditions stationnaires déterminées par la dynamique des points vortex, c'est à dire un strain positif incliné à  $\pi/4$  et des tourbillons centrés en  $R_0 = \pm d/2$  et  $\theta = (0; \pi)$ . Pour simplifier nous considérerons que le tourbillon 2 est assez éloigné du tourbillon 1 pour pouvoir considérer son influence comme celle d'un point vortex et non pas comme celle d'un tourbillon étendu. Les variables sont présentées sur la figure (4.2), on commence par déplacer le centre du repère au centre du tourbillon :

$$x' = x + d/2; y' = y$$

Le strain a pour expression dans ce nouveau repère :

$$\begin{aligned} \bar{\psi} &= \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\gamma}{2}(x^2 - y^2) = \frac{\Omega}{2} \left( \frac{d^2}{4} + rd \cos(\alpha) + r^2 \right) - \frac{\gamma}{2} \left( \frac{d^2}{4} + rd \cos(\alpha) + r^2 \cos(2\alpha) \right) \\ \bar{\psi} &= \bar{\psi}_0 + Vx' + \bar{\psi}_r \end{aligned} \quad (4.2)$$

où l'on met en évidence les composantes fixe, de translation et de rotation comme (les primes seront désormais omis) :

$$\bar{\psi}_0 = \frac{\Omega - \gamma}{2} \frac{d^2}{4} ; \quad Vx = \underbrace{\frac{\Omega - \gamma}{2}}_V \underbrace{dr \cos(\alpha)}_x = \psi_V ; \quad \bar{\psi}_r = \frac{\Omega}{2} r^2 - \frac{\gamma}{2} r^2 \cos(\alpha)$$

Comme pour le calcul de la perturbation nous prendrons un tourbillon de rayon unité. L'expression de la fonction de courant pour ce tourbillon dépend du point où l'on se place (l'indice  $rv$  est pour Rankine vortex) :

$$\psi_{rv} = \begin{cases} \frac{\zeta_0}{4} (r^2 - 1) & \text{pour } r < 1 \\ \frac{\zeta_0}{2} \ln r & \text{pour } r > 1 \end{cases} \quad (4.3)$$

avec  $\zeta_0$  la vorticité potentielle du tourbillon.

Enfin l'autre tourbillon est donc lui considéré comme un point vortex pour sa contribution (l'indice  $pv$  est pour point vortex) :

$$\psi_{pv} = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(\rho^2) = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(d^2 + r^2 + 2rd \cos(\alpha)) \quad (4.4)$$

Les composantes (4.1), (4.2),(4.3) et (4.4) mènent donc à l'expression globale de la fonction de courant :

$$\psi = \bar{\psi}_0 + Vx + \bar{\psi}_r + \psi_{rv} + \psi' + \psi_{pv} \quad (4.5)$$

### 4.1.2 L'état stationnaire

La condition de stationnarité du tourbillon est que la vitesse de l'interface entre le tourbillon et son environnement soit parallèle au champ de vitesse extérieur. C'est à dire que le contour du tourbillon, défini par la fonction  $f(r, \alpha) = r - 1 - \eta(\alpha)$ , doit être une ligne de courant [1] :

$$\frac{-1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \left( \frac{-d\eta}{d\alpha} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{d\eta}{d\alpha} = -\frac{\partial \psi}{\partial \alpha} \quad (4.6)$$

avec  $\psi$  la fonction de courant globale (4.5).

On pose :  $\eta = \eta_0 \sum \varepsilon^n f_n(\alpha)$  avec  $\varepsilon = r/d$ .

Remplaçons  $\psi$  par son expression sans mentionner la partie constante  $\bar{\psi}_0$  :

$$\eta_0 \left( \sum_n \varepsilon^n \frac{df_n(\alpha)}{d\alpha} \right) \frac{\partial (Vx + \bar{\psi}_r + \psi_{rv} + \psi' + \psi_{pv})}{\partial r} = -\frac{\partial (Vx + \bar{\psi}_r + \psi_{rv} + \psi' + \psi_{pv})}{\partial \alpha} \quad (4.7)$$

Déterminons en particulier les composantes liées à l'autre tourbillon en les développant par rapport à  $\varepsilon$  et en n'allant que jusqu'à l'ordre 2 :

$$\frac{\partial \psi_{pv}}{\partial r} = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{r + d \cos(\alpha)}{d^2 + r^2 + 2rd \cos(\alpha)} \simeq \frac{\Gamma}{2\pi d} (\cos(\alpha) - \varepsilon \cos(2\alpha) - 3\varepsilon^2 \cos(\alpha))$$

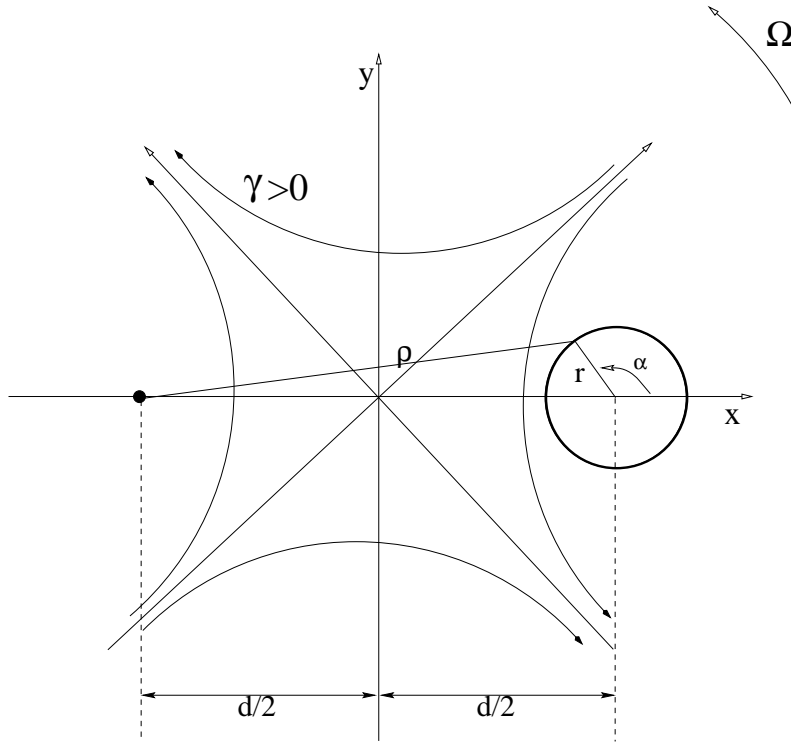


FIG. 4.2 – Nouvelle configuration du problème : un tourbillon étendu est soumis à l'action d'un strain et d'un point vortex

et :

$$\frac{\partial \psi_{pv}}{\partial \alpha} = \frac{-\Gamma}{2\pi} \frac{rd \sin(\alpha)}{d^2 + r^2 + 2rd \cos(\alpha)} \simeq \frac{-\Gamma}{2\pi} (\varepsilon \sin(\alpha) - \varepsilon^2 \sin(2\alpha))$$

L'équation (4.7) avec les autres composantes s'écrit maintenant :

$$\eta_0 \left( \sum_n \varepsilon^n \frac{df_n(\alpha)}{d\alpha} \right) \simeq \frac{Vr \sin(\alpha) - \gamma r^2 \sin(2\alpha) + nAr^n \sin(n\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon \sin(\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon^2 \sin(2\alpha)}{V \cos(\alpha) + \Omega r - \gamma r \cos(2\alpha) + \frac{\zeta_0}{2} r + nAr^{n-1} \cos(n\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi d} \cos(\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi d} \varepsilon \cos(2\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi d} 3\varepsilon^2 \cos(\alpha)}$$

Or nous sommes dans un état stationnaire, donc les composantes de translation (ordre 1 en  $\varepsilon \cos(\alpha)$ ,  $\varepsilon \sin(\alpha)$ ), directement proportionnel à  $x$  et  $y$ ) du centre du tourbillon doivent être nulles. Ces composantes identifiées ci-dessus au dénominateur et au numérateur mènent à la même condition :

$$\begin{aligned} \left( V \cos(\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi d} \cos(\alpha) = 0 \right) & \Leftrightarrow \left( Vr \sin(\alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon \sin(\alpha) = 0 \right) \\ V + \frac{\Gamma}{2\pi d} &= 0 \\ \boxed{\frac{\Gamma}{\pi d^2} + \Omega - \gamma = 0} & \end{aligned} \quad (4.8)$$

qui est l'expression obtenue par la dynamique des points vortex (3.8). **On observe donc que l'ordre 1 du mouvement d'un tourbillon étendu est parfaitement déterminé par la théorie plus simple des points vortex.** L'ordre 2 va nous renseigner sur la déformation du tourbillon.

D'autre part les termes  $\Omega r$  et  $\frac{\zeta_0}{2} r$  d'ordre 0 sont dominants sur les autres termes au dénominateur. On peut réécrire la condition de stationnarité en les passant dans le membre de gauche :

$$\eta_0 \varepsilon^n \left( \sum_n \frac{df_n(\alpha)}{d\alpha} \right) \left( \Omega r + \frac{\zeta_0}{2} r \right) \simeq -\gamma r^2 \sin(2\alpha) + nAr^n \sin(n\alpha) - \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon^2 \sin(2\alpha)$$

**On voit que le mode  $n = 2$  est le mode dominant au premier ordre de déformation en  $\varepsilon^2$ .** Les fonctions  $f_n$  sont périodiques<sup>1</sup> et on peut écrire que  $d_\alpha f_2(\alpha) = -\sin(2\alpha)$ . Il y a donc plusieurs manières d'intégrer cette fonction, nous prendrons la forme :  $f_2(\alpha) = \cos(2\alpha) - 1$  pour être cohérent avec la littérature [3][1].

Nous pouvons désormais calculer l'expression de A. En effet la continuité de la fonction de courant du tourbillon perturbé en  $r = 1 + \eta = 1 + \eta_0 \varepsilon^2 (\cos(2\alpha) - 1)$  s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\psi' + \psi_{rv})_{int}}{\partial r} &= \frac{\partial(\psi' + \psi_{rv})_{ext}}{\partial r} \\ \frac{\zeta_0}{2} r + nAr^{n-1} \cos(n\alpha) &= \frac{\zeta_0}{2} \frac{1}{r} - nA \frac{r^{n-1}}{r^{2n}} \cos(n\alpha) \end{aligned}$$

d'où par identification des termes du même ordre en  $\varepsilon$  on a :

$$\boxed{A \simeq -\frac{\zeta_0 \eta_0 \varepsilon^2}{4}}$$

Avec ces résultats la condition de stationnarité devient pour  $r \simeq 1$  et  $n = 2$  (et en prenant  $\gamma^* = \gamma d^2$ ) :

$$\begin{aligned} -2\eta_0 \varepsilon^2 \left( \Omega r + \frac{\zeta_0}{2} r \right) &\simeq -\gamma r^2 + 2Ar^2 - \frac{\Gamma}{2\pi} \varepsilon^2 \\ \eta_0 &\simeq \frac{\gamma^* + \frac{\Gamma}{2\pi}}{2\Omega + \frac{\zeta_0}{2}} \end{aligned}$$

Que l'on peut enfin écrire avec  $\Gamma = \zeta_0 \pi r^2 \simeq \zeta_0 \pi$  sous la forme :

$$\boxed{\eta_0 \simeq \frac{\gamma^* + \frac{\Gamma}{2\pi}}{2\Omega + \frac{\Gamma}{2\pi}}} \quad (4.9)$$

Dans le cas où le strain est sans rotation ( $\Omega = 0$ ), nous aurons donc l'amplitude du mode 2 proportionnelle à :

$$\eta_0 \simeq 1 + 2\beta d^2$$

**-Remarque :** Sous l'hypothèse supplémentaire que le strain est nul, nous retrouvons le résultat connu :  $\eta_0 \simeq 1$ .

---

<sup>1</sup>Nous l'avons en fait déjà supposé pour déterminer la forme de  $\psi'$ . Cette hypothèse n'était pas nécessaire mais elle a été faite pour rendre le calcul plus aisé et ne remet pas en cause le résultat ci-dessus.

## 4.2 Solution numérique

### 4.2.1 Code états stationnaires

Éprouvons maintenant ces résultats avec un code numérique calculant la forme des états stationnaires de deux tourbillons identiques symétriquement placés de part et d'autre de l'origine sur l'axe des abscisses [4].

En effet nous pouvons calculer la distribution de vorticité dans le cas où celle ci est uniforme sur la surface recouverte par le tourbillon parce que le calcul se résume alors à la forme du contour du tourbillon. Rendre indissociable deux points du tourbillon en leur attribuant la même vorticité repousse la totalité de l'information sur la limite du tourbillon.

On discrétise les abscisses normalisé sur n point, reste à déterminer (voir figure 4.3) les ordonnées  $f(x_n)$  du contour du tourbillon, la valeur  $\psi_0$  de la fonction de courant sur le contour et la vitesse de rotation  $\Omega$  nécessaire à *fixer* les tourbillons sur les axes du repère (la même vitesse calculée en 3.8 et 4.8). Quand le tourbillon est stationnaire, sa fonction de courant est :

$$\psi(x) + \frac{\Omega}{2}(x^2 + y^2) - \frac{\gamma}{2}(x^2 - y^2) = \psi_0 \quad (4.10)$$

On appelle  $\Lambda(x)$  la différence entre le membre de gauche et celui de droite de l'équation (4.10) et on cherche les racines de  $\Lambda$ . On applique la méthode itérative de Newton-Raphson avec :

$$M(f, \Omega, \psi_0) = (\partial_f \Lambda, \partial_\Omega \Lambda, \partial_{\psi_0} \Lambda)$$

la matrice des gradients que l'on doit inverser. Les itérations s'écrivent sous la forme matricielle :

$$X^{n+1} = (I - M^{-1}\Lambda)X^n$$

avec :  $X^n = (f, \psi_0, \Omega)^n$ . Cette méthode a l'avantage d'être très rapide numériquement et donc permet de réaliser un grand nombre d'études.

Les conditions initiales sont : un tourbillon circulaire compris entre  $a$  et 1,  $\psi_0 = 0$  et  $\Omega = 0$ . On normalise l'intensité du strain  $\gamma$  par le rapport géométrique des rayons analytique et numérique.

On effectue le calcul pour des valeurs initiales de  $a$  décroissantes de 1 vers 0 et pour différents strains tel que  $\gamma \leq 0.1^2$ . Sur la figure 4.4 est représentée la forme stationnaire des deux tourbillons pour différentes valeurs de  $a$  et pour  $\gamma = 0.1$ . On observe immédiatement l'aspect elliptique de l'état stationnaire qui s'affine d'autant plus près du centre que les deux tourbillons sont proches.

Pour chaque valeur de  $\gamma$  explorée on décompose numériquement l'allure de l'état stationnaire sur les différents mode de déformation :

$$r = \sum_{n=0}^4 \rho_n \cos(n\alpha)$$

La figure 4.5 représente les termes  $\rho_n$ . Pour des valeurs de  $a$  proche de 1, le rapport des modes sur le mode 2 est de 0.2 pour le mode 4 et de 0.08 pour les modes 1 et 3. Pour des petites valeurs de  $a$ , le rapport des modes sur le mode 2 est de 0.4 pour le mode 4, de 0.02 pour le mode 1 et de 0.1 pour le mode 3. On observe clairement que **le mode 2 de déformation elliptique est dominant au premier ordre** : on retrouve bien numériquement le résultat du calcul analytique. Ceux sont les modes pairs qui dominent nettement les modes impairs et le strain favorise les modes symétriques pairs et diminue l'influence des modes antisymétriques impairs par rapport à l'absence de strain.

La deuxième étape de l'exploitation du code consiste à comparer la surface des tourbillons obtenues analytiquement et numériquement. La surface de notre ellipse théorique est donnée par :  $\mathcal{A} = \pi ab$  avec  $a = r_0$  et  $b = r_0(1 - 2\eta_0\varepsilon^2)$  les demi grand axe et demi petit axe de l'ellipse Ainsi l'expression de la surface du tourbillon est :  $\mathcal{A} = \pi r_0^2(1 - 2\eta_0\varepsilon^2)$ . Nous traçons donc sur un même graphique (voir figure 4.6.I) les surfaces théoriques et numériques de l'état stationnaire. On observe immédiatement la forte concordance des deux résultats. Le graphique de la figure 4.6.II quantifie cette concordance.

<sup>2</sup>La vorticité des tourbillons est prise égale à 1 : pour considérer le strain de faible amplitude nous le prendrons toujours inférieur à 10% de la vorticité.

L'écart n'excède pas 3.5% avec strain et 2.5% sans strain, il est d'autant plus faible que  $a$  est proche de 1.

Enfin la troisième étape consiste à déterminer le rapport critique  $d/r$  en dessous duquel les deux tourbillons fusionnent inexorablement pour ne former qu'une seule structure. En effet le rapport de la distance entre les centres des tourbillons et leur rayon est une distance bien connue et déjà documentée dans le cas sans strain [5] qui vaut de 3.16 à 3.35 suivant la méthode numérique utilisée. On commence donc par prendre un strain nul pour avoir une référence puis on parcourt différentes valeurs de  $\gamma$ . Pour déterminer le rapport critique on trace en fonction de  $a$  le rapport  $d/r = 2x_c/r_c$  calculé par le code. En effet le code calcule les paramètres  $x_c$  et  $r_c$  qui sont l'abscisse du centre et le rayon du cercle équivalent (de même surface) au tourbillon déformé de l'état stationnaire. En traçant le rapport  $2x_c/r_c$  en fonction du paramètre  $a$ , on obtient une courbe avec un minimum. Cette valeur minimale correspond au rapport critique de fusion. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

| $\gamma$ | 0    | 0.005 | 0.025 | 0.05 | 0.075 | 0.1  |
|----------|------|-------|-------|------|-------|------|
| $d/r$    | 3.16 | 3.20  | 3.32  | 3.45 | 3.57  | 3.68 |

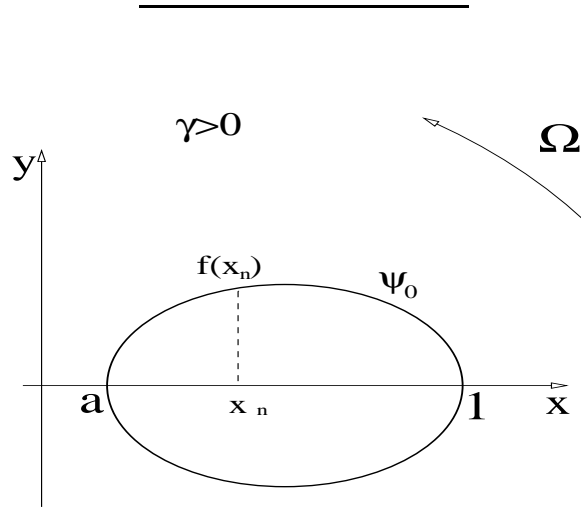


FIG. 4.3 – Le tourbillon étendu défini par son contour et les variables du code numérique.

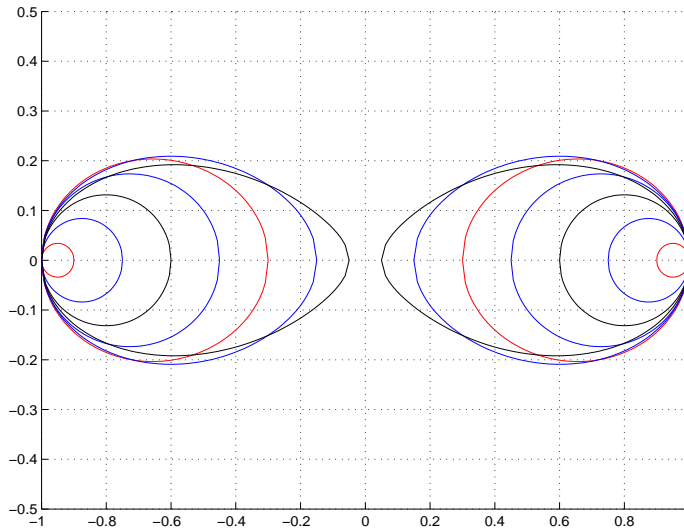


FIG. 4.4 – Etats d'équilibres de deux tourbillons identiques en présence d'un strain ( $\gamma = 0.1$  ;  $a = [0.90, 0.75, 0.60, 0.45, 0.30, 0.15, 0.05]$ ).

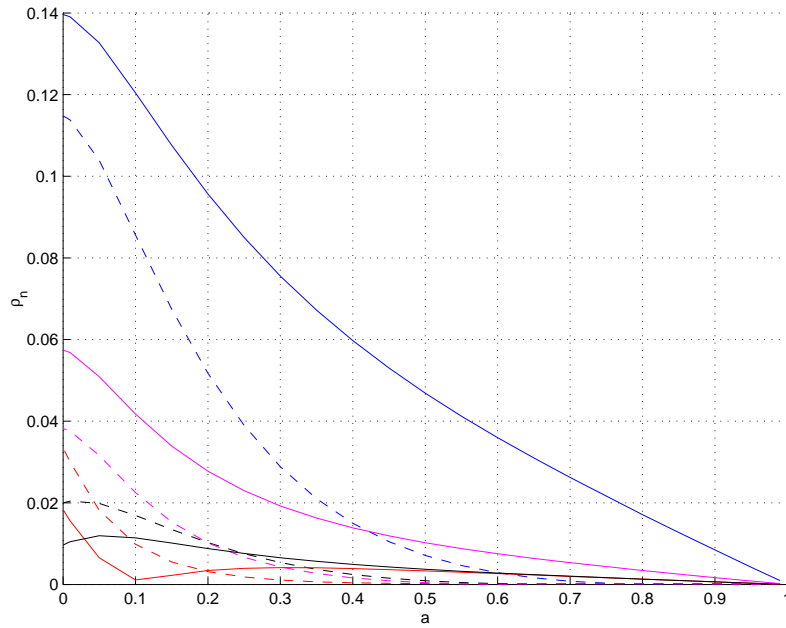


FIG. 4.5 – Décomposition en mode des états stationnaires pour différentes valeurs de  $a$ . (Rouge : mode  $n=1$ ; **Bleu : mode  $n=2$** ; Noir : mode  $n=3$  et Magenta : mode  $n=4$ . Continu : avec strain,  $\gamma = 0.1$ ; Pointillés : sans strain).

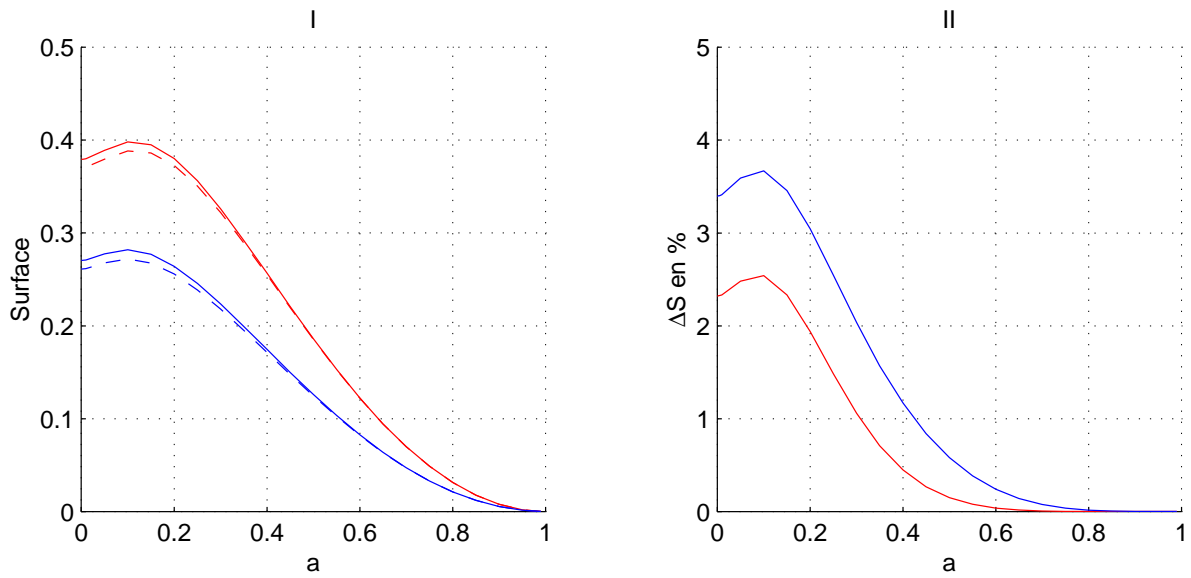


FIG. 4.6 – I : Valeurs des surfaces des tourbillons numérique (continu) et théorique (pointillés) avec un strain d'intensité :  $\gamma = 0.1$  (bleu) et sans strain (rouge). II : Ecart de la théorie et du numérique en % de la valeur théorique.



### 4.2.2 Modèle elliptique

Le code d'état stationnaire partait d'un tourbillon circulaire pour chercher de proche en proche la forme d'équilibre. On peut également utiliser un modèle elliptique qui construit n'importe quelle distribution de vorticité par superposition d'ellipses de vorticité constante.

Un tourbillon elliptique est parfaitement défini par : son rapport d'aspect  $\lambda \leq 1$  (rapport du demi petit axe  $b$  et du demi grand axe  $a$ ), la position  $Z$  de son centre (notation complexe  $Z = X + iY$ ),  $\varphi$  l'angle fait par l'axe principale avec un axe de référence du repère et enfin les deux quantités conservatives : sa surface  $\mathcal{A}$  et sa vorticité  $\zeta$  (voir figure 4.7). Rester dans le système de coordonnées cartésien ou même pôlaire semble peut approprié *a contrario* du système de coordonnées elliptiques. Pour une ellipse de vorticité constante centrée en  $Z$ , on définit les coordonnées elliptiques locales comme ( $\omega = \xi + i\eta$ ) :

$$z = Z + e^{i\varphi} c \cosh \omega \Rightarrow \begin{cases} x &= X + c \cosh(\xi) \cos(\eta) \cos(\varphi) \\ y &= Y + c \sinh(\xi) \sin(\eta) \sin(\varphi) \end{cases} \quad \text{avec : } c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{\frac{\mathcal{A}}{\pi} \left( \frac{1}{\lambda} - \lambda \right)}$$

Les courbes  $\xi = cte$  sont des ellipses et les courbes  $\eta = cte$  des hyperboles. Ces coniques ont les mêmes foyers en  $z = Z \pm ce^{i\varphi}$  où  $\xi = 0$  et  $\eta = n\pi$  (voir [6] Art.66).

Les paramètres de forme de l'ellipse peuvent être réunis sous une seule variable : l'*ellipticité* définie par :  $e = \frac{a^2 - b^2}{2} e^{2i\varphi}$ . Plus  $e$  est proche de 0, plus le tourbillon est proche du cercle ( $a = b$ ).

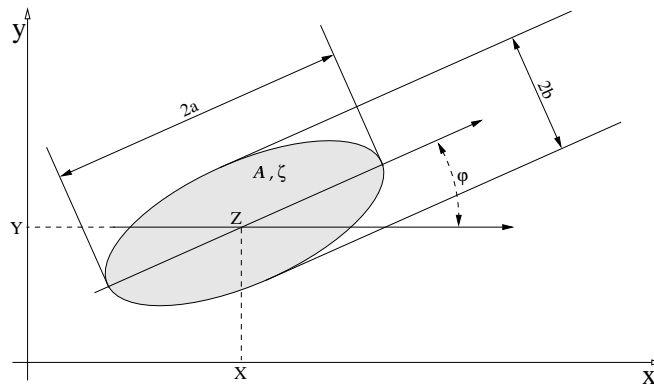


FIG. 4.7 – Le tourbillon dans le modèle elliptique.

La dynamique de chaque tourbillon elliptique se décompose en trois contributions indépendantes pour lesquelles on exprime l'évolution des 3 paramètres  $\lambda$ ,  $Z$  et  $\varphi$  [7] :

- l'interaction du vortex avec lui-même :

$$\dot{\lambda} = 0 ; \dot{Z} = 0 ; \dot{\varphi} = \zeta \frac{\lambda}{(1 + \lambda)^2}$$

- l'interaction avec le strain :

$$\dot{\lambda} = 2\gamma\lambda \sin(2\varphi) ; \dot{Z} = -i\gamma Z^* + i\Omega Z ; \dot{\varphi} = \Omega - \gamma \frac{1 + \lambda^2}{1 - \lambda^2} \cos(2\varphi)$$

- et l'interaction avec l'autre tourbillon :

$$\dot{\lambda} = -\frac{\zeta\lambda^2}{2(1 - \lambda^2)} \left[ \Im \left( \frac{ce^{i\varphi}}{2Z + ce^{i\varphi}} \right) - \Im \left( \frac{ce^{i\varphi}}{2Z - ce^{i\varphi}} \right) \right] ; \dot{Z} = \frac{i\kappa}{4} \left( \frac{1}{Z^*} + \frac{1}{2Z^* + ce^{i\varphi}} + \frac{1}{2Z^* - ce^{i\varphi}} \right)$$

$$\dot{\varphi} = -\frac{\zeta\lambda(1 + \lambda^2)}{4(1 - \lambda^2)^2} \left[ \Re \left( \frac{ce^{i\varphi}}{2Z + ce^{i\varphi}} \right) - \Re \left( \frac{ce^{i\varphi}}{2Z - ce^{i\varphi}} \right) \right] \quad \text{avec : } \kappa = \frac{\zeta\mathcal{A}}{2\pi}$$

La dynamique complète se détermine en sommant les trois contributions pour chaque variable. On obtient [8] :

$$\frac{dZ}{dt} = -i(\gamma Z^* - \Omega Z) - \kappa[2ZBC]^* \tag{4.11}$$

$$\frac{de}{dt} = 2i \left[ e \left( \frac{\kappa}{ab + F} + \Omega \right) - F(\gamma + i\kappa[C(B + e)]^*) \right] \tag{4.12}$$

avec :

$$B = 4Z^2 - e ; C = \frac{i}{B^2 - e^2} ; F = \sqrt{a^2 b^2 + |e|^2} = \frac{a^2 + b^2}{2}$$

On vérifie dans un premier temps (cadre du stage de DEA) l'identité de ces formules - dans le cas stationnaire et où le tourbillon est faiblement elliptique - avec les notres. Dans un deuxième temps (suite du stage et article) on évaluera l'influence de la correction elliptique apportée par ce modèle.

Plaçons nous donc dans le cas de tourbillons faiblement elliptiques (de rayon  $r_0$ ) centrés en  $d/2$  :

$$B = d^2 ; C = \frac{i}{d^4} ; F = r_0^2$$

Les équations (4.11) et (4.12) deviennent avec  $\kappa = \frac{\Gamma}{2\pi}$  :

$$\begin{aligned} 0 &= i(\gamma Z^* - \Omega Z) + \kappa[2ZBC]^* = i\left(\gamma\frac{d}{2} - \Omega\frac{d}{2}\right) - \frac{i\kappa}{d} \Rightarrow \gamma - \Omega - \frac{\Gamma}{\pi d^2} = 0 \\ 0 &= e\left(\frac{\kappa}{ab + F} + \Omega\right) - F(\gamma + i\kappa[BC]^*) = e\left(\frac{\kappa}{2r_0^2} + \Omega\right) - r_0^2\left(\gamma + \frac{\kappa}{d^2}\right) \Rightarrow e = r_0^2 \frac{\gamma + \frac{\Gamma}{2\pi d^2}}{\Omega + \frac{\Gamma}{2\pi 2r_0^2}} \end{aligned}$$

On retrouve de nouveau l'équation de stationnarité du centre du tourbillon (4.8) et des points vortex (3.8). D'autre part d'après sa définition, l'ellipticité peut également s'écrire ( $r = r_0(1 + \eta)$ ) :

$$e = 2r_0^2\eta = 2\eta_0 r_0^2 \frac{r_0^2}{d^2} = r_0^2 \frac{\gamma + \frac{\Gamma}{2\pi d^2}}{\Omega + \frac{\Gamma}{2\pi 2r_0^2}} \Rightarrow \eta_0 = \frac{\gamma d^2 + \frac{\Gamma}{2\pi}}{2\Omega r_0^2 + \frac{\Gamma}{2\pi}}$$

qui est l'expression que nous avons déjà obtenue en prenant  $r_0 = 1$ . **Notre calcul d'état stationnaire converge bien avec la théorie du modèle elliptique.**

---

Dans le cadre du stage, la seule application du code numérique résolvant (4.11) et (4.12) a été la détermination des distances critiques de fusion en fonction du strain. Les résultats sont présentés dans le tableau ci-dessous :

|          |      |       |       |      |       |      |
|----------|------|-------|-------|------|-------|------|
| $\gamma$ | 0    | 0.005 | 0.025 | 0.05 | 0.075 | 0.1  |
| $d/r$    | 3.04 | 3.18  | 3.32  | 3.75 | 4.31  | 5.16 |

# Chapitre 5

## Évolution non linéaire

Pour terminer nous allons observer l'évolution de nos deux tourbillons identiques calculée par un code numérique résolvant l'équation non linéaire (2.1).

### 5.1 Le code pseudo-spectral

Le code utilisé est un programme eulérien qui calcule à chaque instant l'ensemble des valeurs de la fonction de courant  $\psi$  sur le domaine en résolvant l'équation exacte :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi + \bar{\psi}, \zeta) = -(-1)^{n/2} \nu_n \nabla^n \zeta \quad (5.1)$$

avec  $\zeta = \nabla^2 \psi$  la vorticité relative et  $\bar{\psi}$  la fonction de courant du strain définie par l'équation (3.1).

Les dérivées spatiales sont traitées de manière spectrale à l'aide des transformées de Fourier, et les dérivées temporelles de manière classique avec un schéma mixte Euler-leapfrog.

Le domaine de calcul est périodique de dimensions  $[-\pi : \pi]$  suivant les abscisses et aussi les ordonnées. La résolution est de  $256 \times 256$  points de grille.

Le membre de droite de l'équation (5.1) est un opérateur d'hyper-viscosité implanté pour empêcher l'accumulation d'entrophie aux petites échelles Cette procédure numérique n'altère pas la physique tant que  $n$  est grand (ici  $n = 4$ ) et que  $\nu_n$  est assez petit ( $\nu_4 = 10^{-9}$ ).

Les conditions initiales sont deux tourbillons circulaires centrés en  $x = \pm d/2$  et  $y = 0$  et de rayon  $r_0$ . Le profil vortical des vortex n'est pas exactement une fonction de Heavyside : pour éviter au code d'avoir à traiter des gradients infinis on lisse légèrement le contour des vortex.

Les mailles spatiales et temporelles sont choisies de manière à vérifier le critère CFL.

### 5.2 Fusion de deux tourbillons identiques

Observons le mécanisme de fusion dont un exemple est représenté sur la figure 5.1

Les paramètres du code sont ceux mentionnés ci-dessus. Les tourbillons ont la même vorticité  $\zeta = 1$ , leur rayon est de  $r_0 = 0.3$  et le rapport  $d/r_0$  est de 3.4. Le strain est fixe ( $\Omega = 0$ ) avec une intensité de  $\gamma = 0.1$  et fait un angle de  $\pi/4$  avec les abscisses.

L'unité de temps utilisée est le temps de recouvrement  $\tau$ , c'est à dire le temps mis par un tourbillon de vorticité  $\zeta = 1$  pour faire un tour sur lui même :  $1\tau = \frac{2\pi}{\zeta/2} = 4\pi$ .

Les deux tourbillons sous leur influence réciproque tournent l'un autour de l'autre dans le sens anticyclonique. Le champ de déformation se fait rapidement sentir en brisant la symétrie axiale de départ. Les deux tourbillons deviennent axisymétriques et on devine l'axe principale du strain incliné à  $\pi/4$  dans l'alignement du bord des tourbillons ( $t = 0.8\tau$ ). Un tel alignement n'est pas visible en l'absence de strain où la symétrie axiale est préservée.

Les deux tourbillons mélangent rapidement leur fluide et leur axe de rotation se rapprochent de l'origine. La vorticité se concentre et devient maximum au centre du repère. L'excès de vorticité s'échappe par les points selles vers des filaments qui à la périphérie tournent moins vite : il se crée alors un enroulement de vorticité autour du coeur du nouveau tourbillon ( $t = 2.55\tau$  par exemple). L'influence du strain et la différence de vitesse de rotation finissent par détacher les filaments du tourbillon. Leur

faible épaisseur les soumet alors fortement à la diffusion et ils disparaissent ( $t = 3.34\tau$ ). Le nouveau tourbillon prend lui sa forme elliptique d'équilibre[9].

### 5.2.1 Distance critique de fusion

Nous l'avons déjà vu, il existe une distance critique en dessous de laquelle les deux tourbillons fusionnent forcément. Quelle est cette distance (rapportée au rayon initial des vortex) en fonction de l'intensité du strain ?

Les résultats déjà connus et admis nous permettent de faire un scaling de l'intensité du strain et des paramètres du code (particulièrement le coefficient d'hyperviscosité). Les résultats (avec une précision de  $\pm 0.05$ ) sont présentés dans le tableau ci-dessous :

|          |      |        |       |        |      |       |      |       |      |
|----------|------|--------|-------|--------|------|-------|------|-------|------|
| $\gamma$ | -0.1 | -0.075 | -0.05 | -0.025 | 0    | 0.025 | 0.05 | 0.075 | 0.1  |
| $d/r$    | 3.15 | 3.15   | 3.20  | 3.30   | 3.35 | 3.45  | 3.45 | 3.65  | 3.70 |

On remarque immédiatement que la distance critique augmente avec l'intensité du strain, qu'il soit positif ou négatif. **Un strain positif incliné à  $\pi/4$  a donc tendance à favoriser la fusion des deux tourbillons anticycloniques tandis qu'un strain négatif a l'effet contraire**. Il faut recouper ces résultats avec ceux des travaux préliminaires (voir appendice B) qui montrent qu'un strain positif non incliné favorise la fusion et qu'un strain positif incliné à  $\pi/2$  la ralentie fortement.

Nous pouvons également mettre en parallèle l'ensemble des valeurs obtenues avec les deux autres codes numériques. Le tableau ci-dessous résume les distances critiques de fusion :

|  |      |       |      |       |      |
|--|------|-------|------|-------|------|
| $\gamma$                                 | 0    | 0.025 | 0.05 | 0.075 | 0.1  |
| États stationnaires : $d/r (\pm 0.01)$   | 3.16 | 3.32  | 3.45 | 3.57  | 3.68 |
| Modèle elliptique : $d/r (\pm 0.07)$     | 3.04 | 3.32  | 3.75 | 4.31  | 5.16 |
| Code pseudo-spectrale : $d/r (\pm 0.05)$ | 3.35 | 3.45  | 3.45 | 3.65  | 3.70 |

On remarque que la tendance à la favorisation par le strain de la fusion se retrouve dans tous les codes. Les codes d'états stationnaires et pseudo-spectral donnent des valeurs proches les unes des autres mais le modèle elliptique semble donner des valeurs plus éloignées. Il faut toutefois prendre avec recul les résultats de ce code en comparaison des autres car le critère de fusion du modèle elliptique (la version simplifiée utilisée ici) n'est pas exactement le même que celui des deux autres codes, il donne uniquement une première approximation de la distance critique de fusion.

### 5.2.2 Efficacité

Toutes les fusions ne sont pas identiques ; elles sont plus ou moins rapides et surtout plus ou moins efficaces. L'efficacité d'une fusion est le rapport des circulations finales et initiales des tourbillons [10]. Comparons donc l'efficacité des fusions en fonction de l'intensité du strain.

Pour avoir une valeur comparable on se place à 90% de la distance critique de fusion de chaque strain et on calcule l'efficacité au même instant. La circulation d'un tourbillon est directement proportionnelle à sa surface. On calcule donc numériquement le rapport des circulations finale et initiale comme le rapport des surfaces des tourbillons avant et après la fusion.

|                                     |       |        |       |        |       |       |       |       |       |
|-------------------------------------|-------|--------|-------|--------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\gamma$                            | -0.1  | -0.075 | -0.05 | -0.025 | 0     | 0.025 | 0.05  | 0.075 | 0.1   |
| $d/r$                               | 2.83  | 2.83   | 2.88  | 2.97   | 3.01  | 3.10  | 3.10  | 3.28  | 3.33  |
| $\Gamma_{finale}/\Gamma_{initiale}$ | 0.797 | 0.820  | 0.835 | 0.846  | 0.855 | 0.851 | 0.846 | 0.820 | 0.798 |

**L'effet favorable d'un strain positif sur la distance critique de fusion s'accompagne d'une baisse de l'efficacité de cette fusion.** Le maximum d'efficacité est atteint en l'absence de strain. La perte d'efficacité semble quasi-symétrique vis à vis du signe du strain.

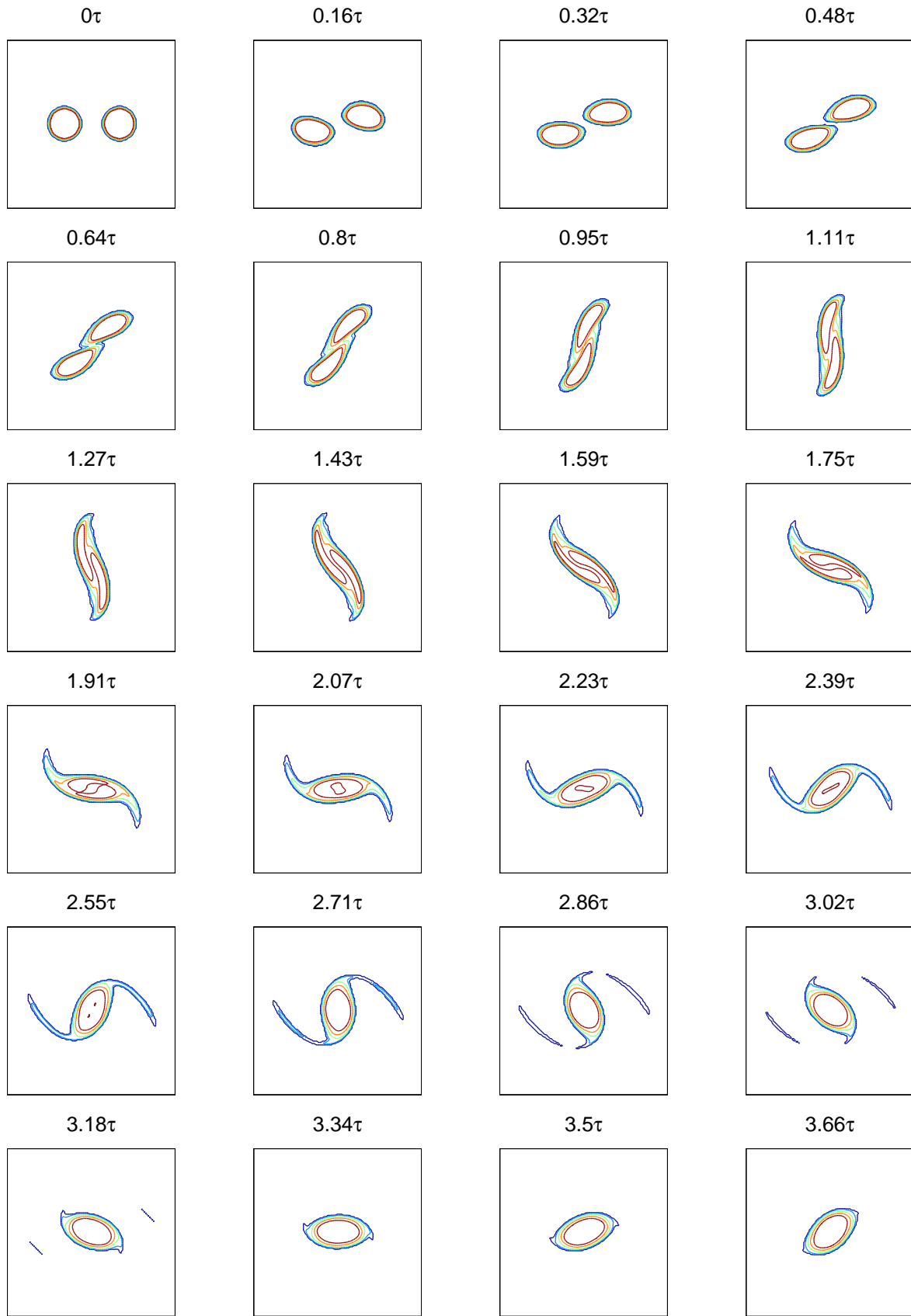


FIG. 5.1 – Fusion de deux tourbillons de vorticité uniforme ( $\zeta = 1$ ) dans un champ externe de déformation fixe (d'intensité  $\gamma = 0.1$ ) incliné à  $\pi/4$ . La lecture se fait de gauche à droite et de haut en bas. Le rayon initial des vortex est de  $r_0 = 0.3$  et le rapport  $d/r_0$  est de 3.4. Le pas de grille est de  $dx = dy = 2\pi/256 = 0.0245$  et le pas de temps  $dt = 0.01$ .

### 5.3 Régimes dynamiques

Enfin on parcourt l'espace des paramètres  $(\gamma, d/r_0)$  en faisant un très grand nombre de simulations numériques. Cela nous permet d'identifier les régimes dynamiques du système et d'en tracer une carte récapitulative.

Pour rester concis nous avons choisi d'identifier un nombre limité de régimes en se fixant des règles simples. On dit qu'il y a *fusion* des deux tourbillons quand cette fusion se produit au cours de la première corotation ; si la fusion n'est pas achevée après ce laps de temps on dit qu'il y a *demi-fusion*. Si les deux tourbillons ne font que tourner l'un autour de l'autre, il y a *rotation*. Si après quelques pas de temps les deux tourbillons n'ont pas changé de place et sont restés stables, il y a *stabilité* (voir figure 5.3). Enfin si les deux tourbillons sont aussitôt emportés par le strain, il y a *strain* (voir figure 5.4). Les résultats sont présentés sur la figure 5.2.

La corotation des deux tourbillons est caractérisée par une trajectoire elliptique de leur centre (grand axe confondu avec celui des abscisses) avec accélération lorsque les tourbillons se rapprochent et ralentissement lorsqu'ils s'éloignent. On retrouve ici la prévision obtenue par la théorie des points vortex. Malheureusement le manque de temps nous a empêché de comparer les rapports d'aspects des trajectoires théoriques et numériques.

Si on regarde l'évolution de la distance entre les centres des tourbillons lorsqu'ils sont emportés par le strain, on remarque que le taux de croissance de la courbe semble exponentiel et surtout que ce taux est indépendant du rapport initial  $d/r_0$ . Une fois que les deux tourbillons sont éjectés leur dynamique devient indépendante (mais reste symétrique) et uniquement fonction du strain.

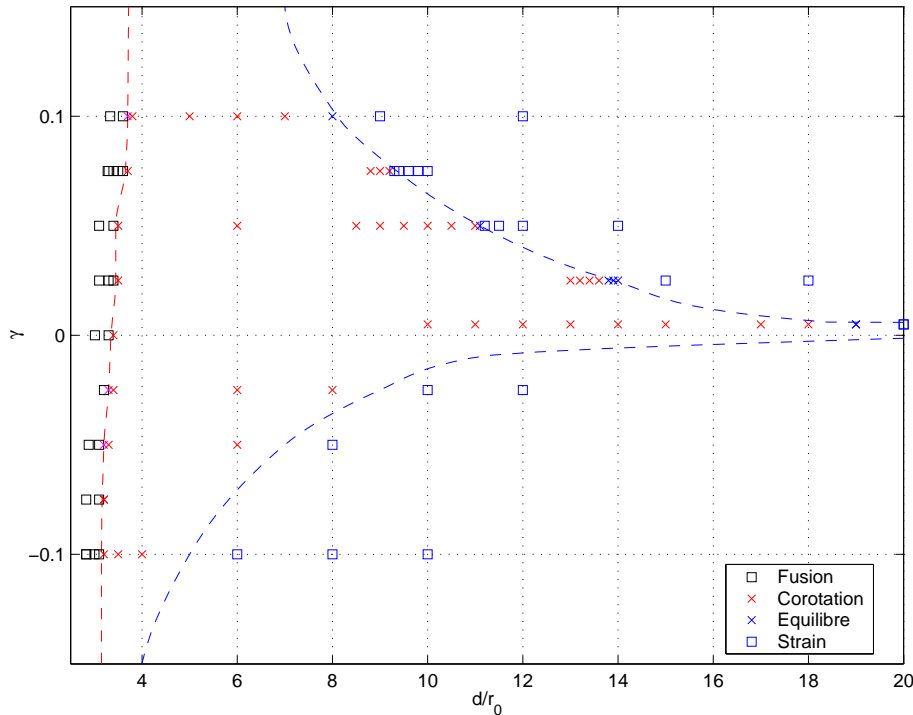


FIG. 5.2 – Régimes dynamiques du système non linéaire pour un strain fixe incliné à  $\pi/4$ . Voir section 5.1 pour les paramètres du code. Carrés bleus : *strain*; croix bleues : *stabilité*; croix rouge : *rotation*; croix noires : *demi-fusion*; carrés noirs : *fusion*. Les courbes en pointillés délimitent les différents régimes.

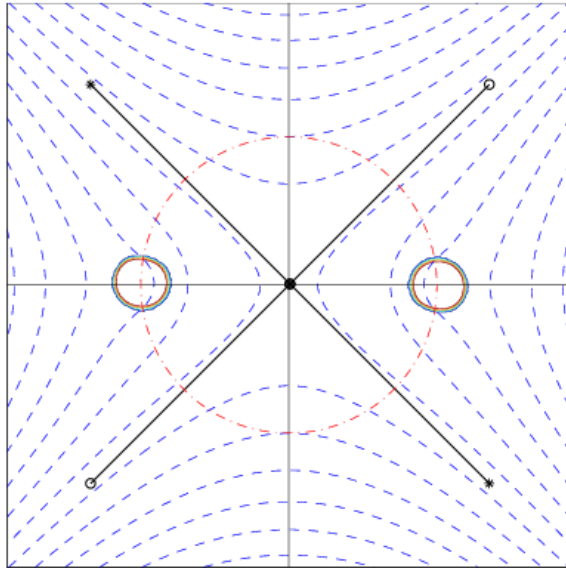


FIG. 5.3 – Exemple d'équilibre des tourbillons. Pointillés bleus : fonction de courant totale. Pointillés rouges : cercle des positions initiales. Continus noirs : les axes du repère et du strain.

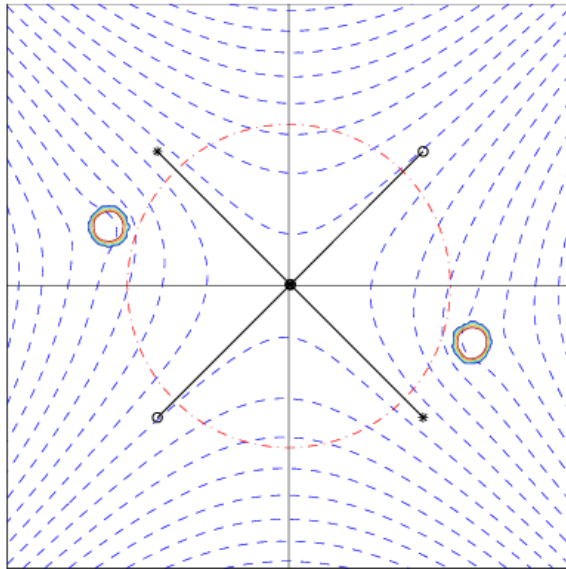


FIG. 5.4 – Exemple des tourbillons emportés par le strain. Pointillés bleus : fonction de courant totale. Pointillés rouges : cercle des positions initiales. Continus noirs : les axes du repère et du strain.

# Chapitre 6

## Conclusion

Il est possible de déterminer analytiquement les premières informations sur la dynamique de deux tourbillons étendus plongés dans un champ externe de déformation de faible amplitude.

La théorie des points vortex nous donne la trajectoire suivie par les tourbillons (elliptique) et l'emplacement de leur centre pour qu'ils soient stationnaires (sur les abscisses en  $\pm R_0$ ). La théorie des tourbillons étendus nous indiquent alors quel sera leur mode de déformation principal (elliptique).

Deux codes numériques nous ont permis de mettre à l'épreuve ces résultats : l'expérience s'est révélée concluante. Les codes nous ont également fournis la distance critique de fusion des tourbillons.

Pour la dynamique non linéaire très difficilement abordable analytiquement, nous nous sommes servis d'un code pseudo-spectral pour résoudre les équations complètes. Nous avons alors pu dessiner les contours des différents régimes dynamiques possibles du système et retrouver grossièrement les prévisions intuitives. D'autre part nous avons pu déterminer qu'un strain incliné à  $\pi/4$  favorise la fusion de deux tourbillons (comme un strain non incliné) mais la fusion est alors moins efficace qu'en l'absence de strain (tout de même plus efficace qu'avec un strain non incliné).

Ces résultats sont encourageants et devraient être approfondis. L'étape suivante serait d'abandonner l'hypothèse bidimensionnelle. En effet le principal changement analytique interviendrait dans l'équation de Poisson (2.2) qui deviendrait alors une équation de Helmholtz qui donnerait à son tour une fonction de Bessel au lieu d'un  $ln$ . On obtiendrait au final les résultats pour le premier mode barocline ce qui permettrait par combinaison avec le mode barotrope du stage d'obtenir tous cas stratifiés. On peut déjà estimer que l'introduction d'un rayon de déformation aura pour conséquence de diminuer les distances critiques de fusion en raison de la forme des dérivés des fonctions de Green ( $K_1$  ou  $\frac{1}{r}$ ). Nous pourrions également nous intéresser au processus de filamentation en appliquant la méthode développée par Klein, Hua et Lapeyre.



# Annexe A

## Formule de l'hamiltonien

Pour un système naturel<sup>1</sup> l'Hamiltonien s'identifie à l'énergie du système. Or cette énergie totale est la somme des énergies des sous-systèmes indépendants qui dans notre cas sont :

- les deux tourbillons seuls,
- le tourbillon 1 dans le champ externe de déformation,
- le tourbillon 2 dans le champ externe de déformation.

L'Hamiltonien est donc (Énergie cinétique) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{1}{2} \iint_S \|\vec{u}\|^2 dS \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \iint_S \|\vec{\nabla}\psi\|^2 dS \\ \mathcal{H} &= \frac{1}{2} \int_{\delta s} \psi \vec{\nabla}\psi \cdot \vec{n} dl - \frac{1}{2} \iint_S \psi \nabla^2 \psi dS \\ \mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \iint_S q\psi dS\end{aligned}$$

Ce qui dans notre cas s'écrit de manière discrète<sup>2</sup> ( $X_1$  et  $X_2$  sont les 2 points vortex) :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= -\frac{1}{2} \left( \sum_{j>i} q_j \psi_i(r_j) + \sum_j q_j \bar{\psi}(r_j) \right) \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Gamma}{2} (\delta(X_2)\psi_1 + (\delta(X_1) + \delta(X_2))\bar{\psi}) \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Gamma}{2} \left( \frac{\Gamma}{4\pi} \ln(4R^2) + \frac{\Omega}{2} R^2 - \frac{\gamma}{2} R^2 \cos(2\theta) + \frac{\Omega}{2} R^2 - \frac{\gamma}{2} R^2 \cos(2\theta + 2\pi) \right) \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Gamma}{2} \left( \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(2R) + \Omega R^2 - \gamma R^2 \cos(2\theta) \right) \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left( \ln(2R) + 2\frac{\pi\Omega}{\Gamma} R^2 - 2\frac{\pi\gamma}{\Gamma} R^2 \cos(2\theta) \right) \\ \mathcal{H} &= -\frac{\Gamma^2}{4\pi} \left( \ln(2R) + 2\frac{\pi\Omega}{\Gamma} R^2 - 2\beta R^2 \cos(2\theta) \right)\end{aligned}$$

---

<sup>1</sup>Un système est dit naturel si l'énergie potentielle et les contraintes qui lui sont imposées ne dépendent pas explicitement du temps.

<sup>2</sup>La condition  $j > i$  dans la première somme empêche de prendre en compte deux fois l'interaction mutuelle des deux tourbillons.

## Annexe B

# Travail préliminaire

## Fourth International Workshop on Vortex Flow and Related Numerical Methods

Lors du mois de mars j'ai aidé Xavier Carton à préparer une intervention pour la 4<sup>ème</sup> Conférence Internationale sur la Dynamique Tourbillonnaire et les Méthodes Numériques Associées (Santa Barbara (USA), March 17-20, 2002). Ce travail m'a permis de me familiariser avec les mathématiques de la physique des tourbillons et a constitué une parfaite introduction au stage. Le compte-rendu de ce travail est fourni avec ce rapport.

# Bibliographie

- [1] Morel Yves G. and Carton Xavier J. Multipolar vortices in two-dimensional incompressible flows. *J. Fluid Mech.*, 267 :23–51, 1994.
- [2] Dritschel David G. The stability of elliptical vortices in an external straining flow. *J. Fluid Mech.*, 210 :223–261, 1990.
- [3] Dritschel David G. The stability and energetics of corotating uniform vortices. *J. Fluid Mech.*, 157 :95–134, 1985.
- [4] Carton Xavier. *Stabilité des structures cohérentes mono et multipolaires dans les écoulements bidimensionnels et quasigeostrophiques bicouches*. PhD thesis, Université Paris VI, 1988.
- [5] Melander, Zabusky M.V., Zabusky N.J., and McWilliams J.C. Symmetric vortex merger in two dimensions : Causes and conditions. *Journal of Fluid Mechanics*, 195 :303–340, 1988.
- [6] Sir Horace Lamb. *Hydrodynamics*. Cambridge University Press, sixth edition, 1932.
- [7] Legras B. and Dritschel D.G. The elliptical model of two-dimensional vortex dynamics. i : The basic state. *Phys. Fluids*, A(3(5)) :845–854, May 1991.
- [8] Dritschel David G. and Juárez Manuel de la Torre. The stability and breakdown of tall columnar vortices in a quasi-geostrophic fluid. *J. Fluid Mech.*, 1996. Accepted 12 July.
- [9] Kida Shigeo. Motion of an elliptic vortex in a uniform shear flow. *Journal of the Physical Society of Japan*, 50 :3517–3520, 1981.
- [10] Waugh D.W. The efficiency of symmetric vortex merger. *Phys. Fluids*, A(4(8)) :1745–1758, 1992.